Procesy stochastyczne

Lista 4

Niech $\{X_t\}_{t\in I}$ będzie rozdziną zmiennych losowych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Zad 1. Udowodnić, że jeżeli istnieje całkowalna zmienna losowa Y taka, że $|X_t| \le Y$ dla każdego $t \in I$, to rodzina $\{X_t\}_{t\in I}$ jest jednostajnie całkowalna.

Zad 2. Załóżmy, że zmienne X_t, $t \in I$, są całkowalne oraz że istnieje rzeczywista funkcja ϕ taka, że

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t} = \infty, \qquad M = \sup_{t\in I} E\big(\phi(|X_t|)\big) < \infty.$$

Wykazać, że rodzina $\{X_t\}_{t\in I}$ jest jednostajnie całkowalna. Wyciągnąć stąd wniosek, iż dowolna rodzina zmiennych losowych ograniczona w przestrzeni L^p dla $p > 1$ jest jednostajnie całkowalna.

Zad 3. Udowodnić, że rodzina $\{X_t\}_{t\in I}$ jest jednostajnie całowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1)\ \sup_{t\in I} E(|X_t|) < \infty, \qquad 2)\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{A\in\mathcal{F}}\ P(A) < \delta \Longrightarrow \sup_{t\in I} \int_A |X_t| dP \le \varepsilon.$$

Zad 4. Udowodnić, że ciąg zmiennych losowych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w przestrzeni L^p, $p \ge 1$ (według p-tego momentu) wtedy i tylko wtedy, gdy

1) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa, 2) $\{|X_n|^p\}_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie całkowalny.

Zad 5. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zmiennych losowych opisujących wyniki rzutu monetą. Niech $\mathcal{F}_n$ oznacza σ-ciało generowane przez $X_1, ..., X_n$. Dla każdego z następujących zdarzeń znaleźć najmniejsze n, dla którego dane zdarzenie należy do $\mathcal{F}_n$:

A - w pięciu pierwszych rzutach pojawiły się conajmniej dwa orły

B - pierwsze pojawienie się orła, poprzedzonego przez nie więcej niż 10 reszek

C - w nieskończonym ciągu rzutów wypadł conajmniej jeden orzeł

D - w stu pierwszych rzutach otrzymaliśmy ten sam wynik

E - w pięciu pierwszych rzutach wypadły nie więcej niż dwa orły i nie więcej niż dwie reszki

Zad 6. Wykazać, że jeżeli $\{X_t\}_{t\in T}$ jest procesem stochastycznym o przyrostach niezależnych i średnich równych zero, to $\{X_t\}_{t\in T}$ jest martyngałem względem filtracji, którą generuje.

Zad 7. Niech X będzie zmienną losową posiadającą wartość oczekiwaną i niech $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ filtracją (gdzie $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, $n = 1, 2, ...$). Pokazać, że ciąg $\{(E(X|\mathcal{F}_n), \mathcal{F}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem.

Zad 8. Niech $\mathcal{W} = \{W_t\}_{t\ge 0}$. Wykazać, że $\{W_t^2\}_{t\ge 0}$ jest podmartyngałem, a $\{W_t^2 - t\}_{t\ge 0}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez $\mathcal{W}$.

Zad 9. Załóżmy, ze $\mathcal{N} = \{N_t\}_{t\ge 0\}}$ jest procesem Poissona, tzn. procesem o prawostronnie ciagłych trajektoriach takim, ze $N_0 = 0$, N ma przyrosty niezależne, oraz $N_t - N_s \sim \text{Poiss}(t - s)$ dla $t > s$. Wykazać, że $\{N_t - \lambda t\}_{t\ge 0}$ oraz $\{(N_t - \lambda t)^2 - \lambda t\}_{t\ge 0}$ są martyngałami względem $\{\mathcal{F}_t^{\mathcal{N}}\}_{t\ge 0}$.

Zad 10. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym na prostej, tzn. $X_n := Y_1 + ... + Y_n$, gdzie $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rokładzie dwupunktowym: $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, oraz niech $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, ..., Y_n)$. Wykazać, że

a) $\{X_n^2 - n\}_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$,

b) $\{(-1)^n \cos(\pi X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ jest martyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$.